① (16) 18 18

EX1 Utiliser la méthode de Newton pour estimer la racine de la fonction $f(x) = e^{-x} - x$ à 10^{-4} près

solution :

Calculons la dérivée de f : $f'(x) = -e^{-x} - 1$

La formule de récurrence de la méthode de Newton s.

$$x_{i+1} = x_i - \frac{e^{-x_i} - x_i}{-e^{-x_i} - 1}$$

En partant de $x_0 = 1$ on obtient

x_0	f	h	x_1
1	-0,632121	-0,4621172	0,5378828
0,5378828	0,0461001	0,02910486	0,5669870
0,5669870	0,0002450	0,00011563	0,5671433
0,5671433	0,0000001	0,00000003	0,567143
0,567143	0,000000	0,000	0,567143

EX2 Refaire le même exercice en utilisant la méthode de la sécante.

Réponse

En prenant $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$

et à partir de la formule de récurrence suivante

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)(x_{i-1} - x_i)}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}$$

On obtient

x_0	x_1	x_3
0	1	0,612700
1	0,612700	0,563838
0,612700	0,563838	0,567170
0,563838	0,567170	0,567143

Ex3

a- Montrer que l'équation $xe^x - 1$ admet une solution dans l'intervalle $[0, 1]$

b- Estimer la racine après 4 itération

solution.

a) $f(x) = xe^x - 1$ est une fonction défine et continue dans l'intervalle $[0, 1]$. et puisque $f(0) = -1$ et $f(1) = 1,718 \Rightarrow f(0) \cdot f(1) < 0$ Donc

Il existe $\alpha \in [0, 1]$ telque $f(\alpha) = 0$

b) on a $$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

$f'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ on obtient. $x_0 = 0,5$

x_0	x_1
0,5	0,5710205
1. 0,5710205	0,5671555
2. 0,5671555	0,5671433
0,5671433	0,5671433
0,5671433	0,5671433

EX 4

1) Montrer que les courbes des fonctions f et g défini respectivement par $f(x) = x^2 - 2$ et $g(x) = e^x$ se coupent en un point d'abscisse α.

2) Trouver α à 10^{-4} en utilisant les methodes de Newton et de la sécante

Rep.

1- Soit $h(x) = g(x) - f(x)$, Montrons que $h(x) = 0$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}$.

On a, $h'(x) = e^x - 2x$ et $e^x - 2 = h''(x)$.

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
h''	$-$	0	$+$
h'	↘		↗

$h'(\ln(2)) = 2 - 2\ln(2) > 0$

h' est alors strictement $> 0 \Rightarrow h$ strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$

Donc $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$

2-1) Methode de Newton

$$x_{i+1} = x_i - \frac{h(x_i)}{h'(x_i)} = x_i - \frac{e^{x_i} - x_i^2 + 2}{e^{x_i} - 2x_i}$$

Remarquons que $\alpha \in]-2, -1[$ $(h(-2) \cdot h(-1)$

$x_0 = -1$ on a :

x_0	x_1	h
-1	-1,57768112	-0,57768112
-1,57768112	-1,49361217	+0,08406902
-1,49361217	-1,49164521	0,0019669316
-1,49164521	-1,491644263	0,000001002

Methode de la sécante :

$x_0 = -2$ $x_1 = -1$ on a :

x_0	x_1	x_2
-2	-1	-1,423159
-1	-1,423159	-1,502322
-1,423159	-1,502322	-1,491439
-1,502322	-1,491439	-1,491644
-1,491439	-1,491644	-1,491644

Ex 5 :

Résoudre par la méthode de Gauss le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 3 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - x_4 = 0 \end{cases}$$

solution

On écrit le système sous forme matricielle $Ax = b$

soit

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

étape ①

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 2 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

Étape ②

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1{,}5 & 1 & 3{,}5 \\ 0 & 0 & -7{,}5 & 6 & 13{,}5 \end{array}\right)$$

Etape ③

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -1,5 & 1 & 3,5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

par substitution par remonte on a

$x_4 = 2$

$x_3 = -1$ $\quad$ $x_2 = 0$ et $x_1 = -1$

Ex 6

soit le système suivant :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + 0y - z = 3 \end{cases}$$

a) Ecrire le système sous forme matricielle.

b) Donner la matrice caractéristique du système

c) Donner les matrices des étapes intermédiaires de l'élimination de Gauss

d) Resoudre le système d'équations

Rep :

a) Le système peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) La matrice caractéristique du système est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 8 \\ 3 & 0 & -1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

c) Etape ①

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & -5 & -5 & \vdots & -10 \\ 0 & -6 & -10 & \vdots & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & -6 & -10 & \vdots & -24 \end{pmatrix}$$

Etape ②

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \vdots & 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix}$$

d) Par substitution par remonter on obtient.

$z = 3$

$y + 3 = 2 \Rightarrow y = -1$

$x + 2(-1) + 3\cdot(3) = 9 \Rightarrow x = 2$

donc $x = 2 \quad y = -1 \quad z = 3$

Ex 7

En utilisant la méthode d'élimination de Gauss, rés le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$$

Rep

La matrice caractéristique du syst est :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Les ≠ étapes de l'élimination de Gauss sont :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\ 0 & 3 & 3 & 2 & 2 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 & -13 \end{array}\right)$$

ce qui donne par substitution par remonte :

$x_4 = 1$ $x_3 = 0$ $x_2 = 2$ et $x_1 = -1$

Remarque

Les étapes sont effectuées comme a été indiqué en cours et en TD

Rés

Ex 8. Estimer le Log(9,2) en prenant les points d'abscisses 9 , 9,5 et 11.

Rep :

On a tout d'abord $\text{Log}(9) = 2,1972$, $\text{Log}(9,5) = 2,2513$ et $\text{Log}(11) = 2,3979$.

on calcule les polynômes caractéristiques de Lagrange

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = x^2 - 20,5x + 104,5 \Rightarrow L_0(9,5) = 0,54$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{1}{0,75}(x^2 - 20x + 99) \Rightarrow L_1(9,5) = 0,48$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{1}{3}(x^2 - 18,5x + 85,5) = L_2(9,5) = -0,02$$

Le polynôme d'interpolation de Lagrange est donné par :

$$P_2(x) = L_0(x) \cdot y_0 + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x)$$

Ce qui donne pour Log (9,2)

$$\text{Log}(9,2) \simeq 0,54 \cdot 2,1972 + 0,48 \times 2,2513 - 0,02 \cdot 2,3979$$

$$\text{Log}(9,2) \simeq 2,2192$$

La même valeur donnée par la calculatrice à 10^{-4} près

Ex° Construire le polynôme d'interpolation de Lagrange à partir des points suivants :

(0,3), (1,3), (3,15) et (5,83)

Rep. On a 4 point donc le polynôme cherché est d'ordre 3.

On a :

$$L_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{-15}$$

$$L_1(x) = \frac{x(x-3)(x-5)}{8}$$

$$L_2(x) = \frac{x(x-1)(x-5)}{-12}$$

$$L_3(x) = \frac{x(x-1)(x-3)}{40}$$

Ce qui donne

$$P_3(x) = 3L_0(x) + 3L_1(x) + 15L_2(x) + 83L_3(x)$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 + x + 3$$

On vérifie que $P_3(0)=3$, $P_3(1)=3$, $P_3(3)=15$ et $P_3(5)=83$

Ex 10

L'espérance de vie dans un pays a évoluée dans le temps selon le tableau suivant.

Année	1975	1980	1985	1990
Espérance	72,8	74,2	75,2	76,4

Utiliser l'interpolation de Lagrange pour estimer l'espérance de vie en 1977, 1983 et 1988.

Rep. on a 4 point ⇒ polynôme d'ordre 3.

$$P_3(x) = \sum y_i L_i(x) \quad \text{avec} \quad L_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)}$$

$$P_3(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x-x_3)}$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} + y_3 \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}$$

~~$P_3(x) = -72,8(x-5)(x-10)(x-15) + 3 \cdot 74,2 \cdot (x-10)(x-15) x - 3$~~

Tout calcul fait on obtient,

- l'espérance de vie en 1977 correspond à = 73,45 ans
- " " " 1983 " à 74,81 ans
- " " " 1988 " à 75,86 ans

Ex 12

soit le tableau suivant.

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	1,7	1,8
$f(x)$	1,543	1,669	1,811	1,971	2,151	2,352	2,577	2,828	3,107

a) Integrer entre 1 et 1,8 en utilisant la methode de trapezes en prenant h = 0,1, 0,2 et 0,4.

2) la fonction tabulée étant ch(x), quelles sont les erreurs dans les différents cas

Rep

La formule generale de la methode trapezes est

$$I = \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{N-2} + f(x_{n-1})\right)$$

1°/

a) $h = 0,1 \Rightarrow N = 9 \Rightarrow I_a \simeq 1,7684$

b) $h = 0,2 \Rightarrow N = 5 \Rightarrow I_b \simeq 1,7728$

c) $h = 0,4 \Rightarrow N = 3 \Rightarrow I_c \simeq 1,7904$

2°/ On a $\int_1^{1,8} ch(x) = [sh(x)]_1^{1,8} \simeq 1,7669$

Dans les 3 cas l'erreur est : $|I_{exact} - I_i|$

h	erreurs
0,1	$1,449\ 10^{-3}$
0,2	$5,849\ 10^{-3}$
0,4	$2,3449\ 10^{-2}$

Ex 12

Pour $x>4$, on considère la fonction F, définie par

$$F(x) = \ln\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right)$$

1°// Calculer $F'(x)$

2°// Calculer la valeur exacte de

$$I = \int_5^{11} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

... (on donnera le résultat avec quatre décimales)

3°// Donner une estimation de I par la méthode de Simpson en choisissant $h=0,5$

(on donnera le résultat avec 4 décimales).

Rep 1// Calculons $F'(x)$, on a

$$F'(x) = \frac{1+\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+8}}}{x-3+\sqrt{x^2-6x+8}}$$

$$= \frac{2x-6+2\sqrt{x^2-6x+8}}{2\sqrt{x^2-6x+8}\left(x-3+\sqrt{x^2-6x+8}\right)}$$

Ce qui donne après simplifications.

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-6x+8}}$$

2°/ La valeur exacte de l'intégrale est :

$$I = \int_5^{11} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 8}} = F(11) - F(5).$$

le calcul exact donne $I = 1,4517$

3°/ En prenant $h = 0,5$ le $x_0 = 5$, 13 points
$x_{12} = 11$

la formule de simpson est donnée par

$$I_{simp} = \frac{h}{3}\left(f_0 + f_{12} + 4\sum_{imp} f_i + 2\sum_{ip} f_i\right)$$

Donc :

$$I_{simp} = \frac{0,5}{3} \cdot \Big[0,5773 + 4 \times 0,4364 + 2 \times 0,3535 + 4 \times 0,2981$$
$$+ 2 \times 0,2581 + 4 \times 0,2279 + 2 \times 0,2041 + 4 \times 0,1849$$
$$+ 2 \times 0,1690 + 4 \times 0,1556 + 2 \times 0,1443 + 4 \times 0,1345 +$$
$$0,1259\Big]$$

$$I_{simp} = 0,1418$$

EX13.

A l'aide de la méthode des trapèzes, estimer l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \sin x^2 \, dx$$ en prenant $N = 5$ et $N = 10$

Solution on a $I = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_{N-1} + 2\sum_{i=1}^{N-2} f_i\right)$.

a// $N = 5$

$\Longrightarrow h = \frac{\pi}{5}$

$$I = \frac{\pi}{10}\left(f_0 + f_4 + 2\sum_{i=1}^{3} f_i\right)$$

$= 0,504431$

b) ~~h~~ $N = 10 \Rightarrow h = \frac{\pi}{10}$

d'où $I = \frac{\pi}{20}\left(f_0 + f_9 + \sum_{i=1}^{8} f_i\right)$

$I = 0,722338$

la valeur exacte est approximativement égale $= 0,772651$